Электронное методическое пособие для выполнения домашнего задания

Домашнее задание №1.

«Преобразования степенных и иррациональных выражений. Вычисление значений числовых выражений»

Формулы для справок

Действия с дробями:

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Формулы сокращенного умножения:

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2\cdot a\cdot b+b^2$	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3$
$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$	$a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot(a^2\mp a\cdot b+b^2)$
$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ где x_1 и x_2 — корни уравнения $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$	

Формулы корней квадратного уравнения:

$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$, дискриминант $D=b^2-4\cdot a\cdot c$

$D>0$	$D=0$	$D<0$
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2\cdot a}$	$x_{1,2}=\frac{-b}{2\cdot a}$	Среди действительных чисел корней нет

Действия со степенями:

$(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$\frac{1}{a^n}=\frac{a^0}{a^n}=a^{-n}$

Действия с корнями (корни предполагаются арифметическими):

$\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}$	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$	$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p=\sqrt[m]{a^{n\cdot p}}$	
$\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\quad (a\ge 0)$	

Рассмотрим решения некоторых заданий по данной теме:

1. Вычислите $\left(\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}\right)^{-\frac{6}{5}}$

Решение:

Представим числитель и знаменатель дроби в виде степени с дробным показателем, применяя формулу $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, получим $\left(\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}\right) = \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{2}{3}}}$.

Используя свойство деления степеней с одинаковыми основаниями $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, имеем

$\frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{5}{6}}$.

Возведем получившееся выражение в степень: $\left(5^{\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{5}} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

2. Упростите выражение $\frac{9x^2-4}{2x^2-5x+2}\cdot\frac{2-x}{3x+2}+\frac{x}{1-2x}$

Решение:

Выполним тождественные преобразования:

$$\frac{9x^2-4}{2x^2-5x+2}\cdot\frac{2-x}{3x+2}+\frac{x}{1-2x} = \frac{(3x-2)\cdot(3x+2)}{2(x-2)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{2-x}{3x+2}+\frac{x}{1-2x} =$$

$$= \frac{3x-2}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{x}{1-2x} = \frac{3x-2}{1-2x}+\frac{x}{1-2x} = \frac{4x-2}{1-2x} = \frac{-2(1-2x)}{1-2x} = -2.$$

Квадратный трехчлен $2x^2-5x+2$ можно разложить на множители по формуле

$a\cdot x^2+b\cdot x+c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$

С помощью формул дискриминанта и корней квадратного уравнения получаем, что уравнение $2x^2-5x+2=0$ имеет 2 действительных корня $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$, поэтому получим

$2x^2-5x+2 = 2(x-2)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

3. Вычислите $\left(\frac{1}{6}-1\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right):0{,}6+0{,}4$

Решение:

$$\left(\frac{1}{6}-1\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right):0{,}6+0{,}4 = \left(\frac{1}{6}-\frac{16}{15}+\frac{1}{10}\right):0{,}6+0{,}4 = \left(\frac{10-64+6}{60}\right):0{,}6+0{,}4 =$$

$$= -\frac{48}{60}:\frac{6}{10}+0{,}4 = -\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}+\frac{4}{10} = -\frac{4}{3}+\frac{2}{5} = \frac{-20+6}{15} = -\frac{14}{15}.$$

Выполните самостоятельно

1. Упростите выражение $(3x+2)^2-5x(2-x)$

2. Вычислите $\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{32}}\right)^{-4}$

3. Упростите выражение $\left(\frac{2}{x-4}+\frac{4x-6}{x^2-3x-4}\right):\frac{2}{x+1}$

4. Вычислите $4-3{,}3:\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)$

5. Сократите дробь $\frac{3x^2+7x-6}{x^2-9}$

Домашнее задание №2.

«Решение уравнений и неравенств. Решение систем уравнений и неравенств».

Рассмотрим основные методы решения алгебраических неравенств

1. Линейные неравенства, т.е. неравенства вида $ax > b$, где a и b – действительные числа, а x – неизвестное.

В зависимости от коэффициентов a и b решением линейного неравенства может быть либо неограниченный промежуток, либо вся числовая прямая, либо пустое множество.

Пример. Решите неравенство $x-\frac{x}{4}>\frac{3x}{2}+12$

Решение:

Умножим все неравенство на наименьший общий знаменатель – число 4 и соберем слагаемые с переменной в левой части неравенства, а без переменной в правой.

$4x-x>6x+48$

$3x-6x>48$

$-3x>48$

$x<-16$

Не забываем при этом, что при делении или умножении неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный.

Ответ: $x\in(-\infty,-16)$

2. Квадратные неравенства имеют вид $ax^2+bx+c>0\ (<0)$ *где* $a\neq 0$.

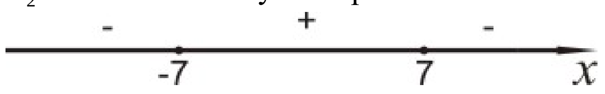
Решение квадратных неравенств основано на применении свойств квадратичной функции, которые допускают наглядную геометрическую интерпретацию, а также методом интервалов.

Пример. Решите квадратное неравенство $98-2x^2\geq 0$

Решение:

Решим исходное неравенство $98-2x^2\geq 0$ методом интервалов.

Для этого найдем нули выражения $98-2x^2=0$. Решая уравнение, получим два корня: $x_1=-7$ и $x_2=7$. Отметим нули выражения на числовой оси



Видим, что неравенство выполняется, при $x\in[-7;\ 7]$.

3. Дробно-рациональные неравенства. При решении таких неравенств можно придерживаться следующей схемы: перенести все члены неравенства в левую часть; все члены неравенства в левой части привести к общему знаменателю, т.е. неравенство записать в виде $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}>0\ (<0)$; решить полученное неравенство методом интервалов.

Пример. Решите неравенство $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$

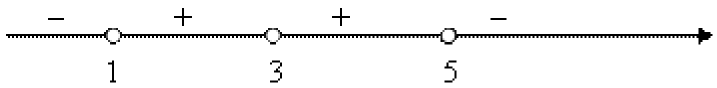
Решение:

$$\frac{4-x}{x-5}-\frac{1}{1-x}>0$$

$$\frac{(4-x)\cdot(1-x)-1\cdot(x-5)}{(x-5)\cdot(1-x)}>0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{(x-5)\cdot(1-x)}>0$$

Находим нули числителя и нули знаменателя, отмечаем их на числовой оси. Расставляем знаки получившегося выражения на каждом из интервалов, не забывая при этом, что при прохождении нулей четной кратности выражение свой знак не меняет.



Ответ: $x\in(1;3)\cup(3;5)$

В данном разделе остановимся и на повторении решения систем уравнений и неравенств.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases}x+5y=7,\\3x+2y=-5\end{cases}$

Решение:

Для решения системы уравнений можно из первого уравнения выразить переменную x и подставить ее значение во второе уравнение.

Получим

$$\begin{cases}x+5y=7,\\3x+2y=-5;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7-5y,\\3(7-5y)+2y=-5;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7-5y,\\-13y=-26;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7-10,\\y=2;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-3,\\y=2.\end{cases}$$

Значит, данная система имеет решение $(-3;\,2)$.

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases}3x+5<2x+9,\\2x-7>x-6.\end{cases}$

Решение:

Первое неравенство даёт: $x<4$; решение второго неравенства в данном примере: $x>1$. Таким образом, решение системы неравенств: $1<x<4$.

Пример 3. Решить задачу.

Велосипедист и мотоциклист выехали одновременно навстречу друг другу из двух поселков и встретились через 3 часа. Скорость велосипедиста на 2 км/ч меньше скорости мотоциклиста, расстояние между поселками 30 км. Тогда скорость велосипедиста равна …

Решение:

Обозначим через x скорость велосипедиста, тогда $(x+2)$ – скорость мотоциклиста. Так как они встретились через 3 часа и расстояние между поселками равно 30 км, составим уравнение: $3x+3\cdot(x+2)=30$. Оно имеет корень $x=4$. Значит, скорость велосипедиста 4 км/ч.

Решите самостоятельно

1. Решите неравенство $x+\frac{x}{3}\geq\frac{x}{6}+14$

2. Найдите длину интервала на котором выполняется неравенство $5x-x^2\geq0$

3. Решите неравенство $\frac{x+2}{x-2}\leq\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}$

4. Решите систему уравнений а) $\begin{cases} 5x - 7y = 11, \\ x + y = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ 3 - \dfrac{x}{4} \geq x \end{cases}$

6. Решите задачу.

Прямоугольный участок земли обнесен забором, длина которого 40 метров. Площадь участка 96 м^2. Найдите длину наибольшей стороны участка.

Домашнее задание №3

«Комплексные числа»

Некоторые сведения из теории.

Комплексным числом z называется число вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*. Число a называется *действительной частью* ($\operatorname{Re} z$) комплексного числа z, число b называется *мнимой частью* ($\operatorname{Im} z$) комплексного числа z.

Очень важно запомнить, что $i^2 = -1$

$a + bi$ – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами: $z = bi + a$ или переставить мнимую единицу: $z = a + ib$ – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**: $z = a + bi$.

Сложение комплексных чисел

<u>**Пример 1**</u> Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Решение: Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:
$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$
Таким нехитрым способом можно найти сумму любого количества слагаемых: просуммировать действительные части и просуммировать мнимые части.

Вычитание комплексных чисел

<u>**Пример 2**</u> Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Решение: Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:
$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$
Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2 - \sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.
Рассчитаем вторую разность: $z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$
Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

Умножение комплексных чисел

<u>**Пример 3**</u> Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Решение: Произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$

Раскрыть скобки требуется по правилу умножения многочленов, главное, помнить, что $i^2 = -1$ **и быть внимательным**.
Повторим школьное правило умножения многочленов: Чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена, подробно:

$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

Деление комплексных чисел

Пример 4 Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение: Составим частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (***помним, что*** $i^2 = -1$ ***и не путаемся в знаках!!!***).

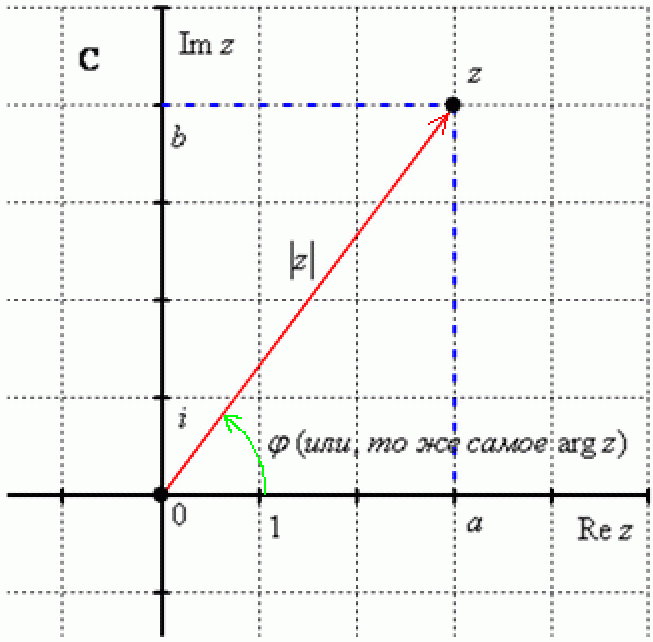
Подробно:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91 + 7i + 78i + 6i^2}{7^2 - (6i)^2} = \frac{91 + 7i + 78i - 6}{49 - (-36)} =$$

$$= \frac{85 + 85i}{49 + 36} = \frac{85 + 85i}{85} = 1 + i$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что $a > 0, b > 0$:



Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $|z|$ – это **модуль комплексного числа**, а φ – **аргумент комплексного числа**.

Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r и найти его можно с помощью формулы $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Аргументом комплексного числа z называется **угол** φ между положительной полуосью действительной оси $\operatorname{Re} z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z=0$.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента: $\arg z = arctg\dfrac{b}{a}$.

При этом возможны три варианта:

1) Если $a>0$ (1-ая и 4-ая координатные четверти, или правая полуплоскость), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = arctg\dfrac{b}{a}$.

2) Если $a<0, b>0$ (2-ая координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = \pi + arctg\dfrac{b}{a}$.

3) Если $a<0, b<0$ (3-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = -\pi + arctg\dfrac{b}{a}$.

Пример 5 Представим в тригонометрической форме число $z_4=1-\sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент.

Решение: $|z_4|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

Поскольку $a>0$ (случай 1), то $\arg z_4 = arctg\dfrac{b}{a} = arctg\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$ (минус 60 градусов).

Таким образом: $z_4 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ – число z_4 в тригонометрической форме.

Возведение комплексных чисел в степень

Для возведения комплексного числа в степень можно использовать **формулу Муавра**: Если комплексное число представлено в тригонометрической форме $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то при его возведении в натуральную степень n справедлива формула:

$$z^n=|z|^n\cdot(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$$

Пример 6 Дано комплексное число $z=3+\sqrt{3}i$, найти z^{20}.

Решение: Сначала нужно представить данное число в тригонометрической форме(смотри пример 5). $z=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

Тогда, по формуле Муавра:

$$z^{20}=(2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)=(2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

<u>Пример 7</u> Возвести в степень комплексные числа i^{10}, i^{33}, $(-i)^{21}$

Решение:
Если мнимая единица возводится в четную степень, то техника решения такова: $i^{10}=(i^2)^5=(-1)^5=-1$

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отщипываем» одно «и», получая четную степень:
$i^{33}=i\cdot i^{32}=i\cdot(i^2)^{16}=i\cdot(-1)^{16}=i\cdot 1=i$

Если есть минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить:
$(-i)^{21}=(-1)^{21}\cdot i^{21}=-i\cdot i^{20}=-i\cdot(i^2)^{10}=-i\cdot(-1)^{10}=-i$

Извлечение корней из комплексных чисел.
Квадратное уравнение с комплексными корнями

<u>Пример 8</u> Решить квадратное уравнение $z^2-6z+34=0$

Решение:
Вычислим дискриминант:
$D=36-136=-100$
Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!
$\sqrt{D}=\pm 10i$
По известным школьным формулам получаем два корня:
$$z_{1,2}=\frac{6\pm 10i}{2}$$
$z_{1,2}=3\pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение $z^2-6z+34=0$ имеет два сопряженных комплексных корня: $z_1=3-5i$, $z_2=3+5i$

Рассмотрим уравнение $z^n=w$, или, то же самое: $z=\sqrt[n]{w}$. Здесь «эн» может принимать любое натуральное значение, которое больше единицы. В частности, при $n=2$ получается квадратный корень $z=\sqrt{w}$

Уравнение вида $z=\sqrt[n]{w}$ имеет ровно n корней $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$, которые можно найти по формуле:
$$z_k=\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),$$ где $|w|$ – это модуль комплексного числа w, φ – его аргумент, а параметр k принимает значения: $k=\{0;1;2;\ldots;n-1\}$

<u>Пример 9</u> Вычислить $z=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

Решение: В данном примере $w=1+\sqrt{3}i$, $n=2$, поэтому выражение будет иметь два значения: z_0 и z_1.
Общую формулу можно сразу немножко детализировать:
$$z_k=\sqrt{|w|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{2}\right)\right),\quad k=\{0;1\}$$

Теперь нужно найти модуль и аргумент комплексного числа $w=1+\sqrt{3}i$:
$|w|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

Число w располагается в первой четверти, поэтому:

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Еще более детализируем формулу:

$$z_k = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)\right),\ k=\{0;1\}$$

Подставляя в формулу значение $k=0$, получаем первое значение:

$$z_0 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Подставляя в формулу значение $k=1$, получаем второе значение:

$$z_1 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

Ответ: $z_0 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

Решите самостоятельно

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 3i+2$ и $z_2 = 3i-2$
2. Представьте в тригонометрической форме число $z = 4-4\sqrt{3}\cdot i$
3. Решите уравнение на множестве комплексных чисел $x^2-2x+10=0$
4. Вычислить:

а) Дано комплексное число $z = 3\cdot(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$. Найдите значение z^4

б) Найдите произведение комплексных чисел $z_1 = \sqrt{3}\cdot(\cos 27^\circ + i\sin 27^\circ)$ и $z_2 = \sqrt{6}\cdot(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$

в) Найдите частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1 = 2\cdot(\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ)$ и $z_2 = 8\cdot(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$

5. Найдите комплексное число, сопряженное числу $z = -7\cdot i+3$

Домашнее задание №4.

«Степень с действительным показателем. Иррациональные уравнения»

Краткие сведения теории.

Для степени с действительным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для любых показателей. Их мы рассматривали выше.

Методы решения иррациональных уравнений

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называются иррациональными. Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо эквивалентно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель корня - четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным
2) если показатель корня - нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3}=1$

Решение: Возведем обе части уравнения в квадрат.x^2 - 3 = 1. Перенесем число 3 из левой части уравнения в правую часть и выполним приведение подобных слагаемых.x^2 = 4. Полученное неполное квадратное уравнение имеет два корня -2 и 2.
Произведем проверку полученных корней, для этого произведем подстановку значений переменной x в исходное уравнение.
Проверка.

При x_1 = -2 , $\sqrt{(-2)^2-3}=1$ - истинно:

При x_2 = -2 , $\sqrt{2^2-3}=1$ - истинно.
Отсюда следует, что исходное иррациональное уравнение имеет два корня -2 и 2.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-9}=\sqrt{1-x}$.

Решение:Это уравнение можно решить как и в первом примере, но мы поступим иначе.
Найдем ОДЗ данного уравнения. Из определения квадратного корня следует, что в данном уравнении одновременно должны выполняться два условия:
а) x - 9 $\geq$0;
x $\geq$ 9;
б) 1 - x $\geq$ 0;
-x $\geq$-1 ;
x $\leq$ 1.
ОДЗ данного уравнения: x$\in$ $\varnothing$.
Ответ: корней нет.

Пример 3. Решить уравнение x = $\sqrt{x+1}$.
Решение:
В этом примере ОДЗ найти легко. ОДЗ этого уравнения: x$\in$[0;+ ∞).
Возведем обе части этого уравнения в квадрат, в результате получим уравнение x2= x + 1. Корни этого уравнения:

x1 = $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

x2 = $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Далее необходимо произвести проверку найденных корней. Видим, что значение второго корня отрицательно, поэтому этот корень не принадлежит области допустимых значений.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Пример 4 . Решить уравнение $\sqrt{x+5}$ + $\sqrt{20-x}$ = 7.
Решение:

Найдем область допустимых значений $\begin{cases} x+5\geq 0, \\ 20-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-5;20]$.

Возведем обе части уравнения в квадрат и выполним приведение подобных членов, перенес слагаемых из одной части равенства в другую и деление обеих частей на 2. В результате мы получим $x+5+2\sqrt{(x+5)\cdot(20-x)}+20-x=49$

$2\sqrt{(x+5)\cdot(20-x)}=24$

$\sqrt{(x+5)\cdot(20-x)}=12$,

Снова возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение (x + 5)(20 - x) = 144, являющееся следствием исходного. Полученное уравнение приводится к виду $x^2 - 15x + 44 = 0$.
Это уравнение имеет корни $x_1 = 4$, $x_2 = 11$. Оба корня принадлежат области допустимых значений.
Ответ $x_1 = 4$, $x_2 = 11$.

Решите самостоятельно

1. Вычислите а) $\dfrac{16^7 - 16^6}{8^{10} + 8^9 + 8^8}$, б) $\dfrac{5^{\sqrt{7}-1} \cdot 5^{4+2\sqrt{7}}}{\left(5^{\sqrt{7}}\right)^3}$, в) $\left(3^{\sqrt{7}-2}\right)^{\sqrt{7}+2}$

2. Решите уравнения а) $\sqrt{3x+7} = 4$, б) $\sqrt{1 - \dfrac{5x}{6}} = \dfrac{2}{3}$, в) $\sqrt[3]{3x^2 - 2x} = x$

г) $\sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1 - x$, д) $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$

Домашнее задание №5.

«Решение показательных уравнений и неравенств»

Рассмотрим основные методы решения показательных уравнений.

Показательными называют уравнения, в которых неизвестная величина содержится в показателе степени, при этом основа степени не содержит неизвестной величины. Самое простое из показательных уравнения $a^x = c$.

1) Приведение к одинаковому основанию левой и правой части уравнения.

$2^{x+6} = 8$;
$2^{x+6} = 2^3$,
Основания степеней равны, значит, равны и показатели степеней.
X + 6 = 3,
X = -3.
Ответ: - 3.

2) Вынесение общего множителя за скобки.

$4^{x+1} + 4^x = 320$, вынесем за скобки степень с наименьшим показателем.
$4^x * 4 + 4^x = 320$,
$4^x (4 + 1) = 320$,
$4^x * 5 = 320$,
$4^x = 320 : 5$,
$4^x = 64$,
$4^x = 4^3$,
x = 3.
Ответ: 3

За скобки выносят член с наименьшим показателем степени. Чтобы найти многочлен, заключенный в скобки, надо каждый член многочлена, стоящего в левой части уравнения, разделить на вынесенный множитель, Деление осуществлять по правилу: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

3) Введение новой переменной.

$4^x + 2 \cdot 2^x - 48 = 0.$

Преобразуем уравнение.

$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 48 = 0,$
$\left(2^x\right)^2 + 2 \cdot 2^x - 48 = 0.$

Имеем квадратное уравнение относительно 2^x. Решаем при помощи замены $2^x = y.$ Получаем:

$y^2 + 2y - 48 = 0.$

Корнями последнего уравнения являются значения $y_1 = -6, \ y_2 = 8.$

Возвращаясь к неизвестной X, имеем совокупность:

$$\left[\begin{aligned}&2^x=-6,\\&2^x=8.\end{aligned}\right.$$

Первое уравнение совокупности решений не имеет. Решаем второе уравнение:

$2^x=8,$ т. е. $2^x=2^3.$

Получили ответ: $X = 3$.

4) Почленное деление на показательную функцию.

$$3\cdot16^x-5\cdot36^x+2\cdot81^x=0.$$

Выполним необходимые преобразования:

$$3\cdot4^{2x}-5\cdot(4\cdot9)^x+2\cdot9^{2x}=0,$$
$$3\cdot4^{2x}-5\cdot4^x\cdot9^x+2\cdot9^{2x}=0.$$

Имеем однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на 9^{2x} ($9^{2x}\neq0$). Получим:

$$3\cdot\frac{4^{2x}}{9^{2x}}-5\cdot\frac{4^x\cdot9^x}{9^{2x}}+2\cdot\frac{9^{2x}}{9^{2x}}=0,$$

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+2=0,$$

Т. е. получили квадратное уравнение относительно $\left(\frac{4}{9}\right)^x.$ Вводим замену $\left(\frac{4}{9}\right)^x=y.$ Тогда

$$3y^2-5y+2=0,$$

Откуда $y_1=\frac{2}{3},\ y_2=1.$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{aligned}&\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3},\\&\left(\frac{4}{9}\right)^x=1;\end{aligned}\right.\quad\left[\begin{aligned}&\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3},\\&\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^0;\end{aligned}\right.\quad\left[\begin{aligned}&2x=1,\\&x=0;\end{aligned}\right.\quad\left[\begin{aligned}&x=\frac{1}{2},\\&x=0.\end{aligned}\right.$$

Получили ответ: $x=0,\ x=\frac{1}{2}.$

Далее рассмотрим некоторые виды и методы решения показательных неравенств.

1) $4^{2x-3}\geq64$

Решение:

Приведем обе части неравенства к одному основанию:

$4^{2x-3}\geq4^3$.

Так как $4>1$, то $2x-3\geq3\Rightarrow x\geq3$, или $x\in[3;+\infty)$.

2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4}\cdot7\sqrt{7}<\frac{1}{7}$

Решение:

Приведем обе части неравенства к одному основанию:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4}\cdot 7\sqrt{7}<\frac{1}{7},$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4}\cdot 7^{1,5}<\frac{1}{7},$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-1,5}<\frac{1}{7},$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+2,5}<\frac{1}{7}.$$

Так как $\frac{1}{7}<1$, то $3x+2,5>1\Rightarrow x>-0,5$, или $x\in(-0,5;+\infty)$.

3) $4\cdot 0,5^{x^2+3x}<\left(0,5^2\right)^{2x}$

Решение:

Заметим, что $4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=0,5^{-2}$.

$$0,5^{-2}\cdot 0,5^{x^2+3x}<\left(0,5^2\right)^{2x},$$

$$0,5^{x^2+3x-2}<0,5^{4x}.$$

В силу того, что основание степени $0,5<1$, то есть мы имеем дело с убывающей функцией, переходим к следующему неравенству (не забывая поменять знак неравенства на противоположный).

$$x^2+3x-2>4x$$

$$x^2-x-2>0.$$

Решая получившееся неравенство методом интервалов, получаем $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

4) $2^x-2^{x-4}\le 15$

Решение:

Вынесем за скобки степень с наименьшим показателем в левой части неравенства.

$$2^{x-4}\cdot\left(2^4-1\right)\le 15,$$

$$2^{x-4}\cdot 15\le 15,$$

$$2^{x-4}\le 1,$$

$$2^{x-4}\le 2^0.$$

В силу того, что основание степени $2>1$, то есть мы имеем дело с возрастающей функцией, переходим к следующему неравенству

$$x-4\le 0,$$

$$x\le 4.$$

Получаем $x\in(-\infty;4]$.

Решите самостоятельно

1. Решите уравнения

а) $8^{x+1}=0,125$, б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}\cdot\frac{9}{4}=1$, в) $6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71$

г) $9^x-3^x-6=0$, д) $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0$

2. Решите неравенство

а) $9^{3x+1}<9^{7-x}$, б) $16^x>0,125$, в) $5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1}\ge\sqrt{125}\cdot\sqrt{5}$, г) $36^{0,5x^2-1} \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$, д) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 2^{3-x} \leq 16$ е) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leq 315$

3. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4^{x+y^2} = 16 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2^{x-3y} = 32 \\ 5^{2x-y} = 0,2 \end{cases}$.